TD 1-2 : Logique, ensembles

Logique et quantificateurs

Exercice 1. Soit P, Q deux assertions. À l'aide de tables de vérité, montrer les équivalences suivantes :

1) $\text{non}(P \text{ et } Q)$ équivaut à $\text{non}P$ ou $\text{non}Q$
2) $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ équivaut à $\text{non}P$ et $\text{non}Q$
3) $P \implies Q$ équivaut à $\text{non}Q \implies \text{non}P$
4) $P \implies Q$ équivaut à $\text{non}P$ ou Q
5) $\text{non}(P \implies Q)$ équivaut à P et $\text{non}Q$

Exercice 2. Soit P une assertion. Dans quel(s) cas est-ce que l'assertion $P \implies \text{non}P$ est vraie ?

Exercice 3. Soit P, Q, R trois assertions fausses.

1) Est-ce que $(P \implies Q) \implies R$ est vraie ?
2) Même question pour $P \implies (Q \implies R)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 4. Énoncer en français la signification des assertions suivantes, et indiquer si elles sont vraies ou fausses.

1) $\exists x \in \mathbb{Q} \quad x < 0$
2) $\forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 + y + 1 > 0$
3) $\exists! u \in \mathbb{R} \quad u^2 + 4u + 3 = 0$
4) $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad a + b$ est pair
5) $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad c^2 = a^2 + b^2$
6) $\exists! (u,v) \in \mathbb{N}^2 \quad u^2 + v^2 = 4$

Exercice 5. Pour chacune des assertions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, puis donner sa négation.

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n$ est pair
2) $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = -1$
3) $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = \sqrt{x}$
4) $\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq M$
5) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists z \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = z^2$
6) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < 3 \implies x^2 > 4$

Exercice 6. Les propositions logiques suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- $P : \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- $Q : \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- $R : \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire avec des quantificateurs :

1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
3) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Raisonnements

Exercice 8. Soit x un réel (quelconque). Démontrer l'assertion

$$x = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon$$

Exercice 9. Soit a, b deux réels. Montrer que si l'équation $ax + b = 0$ admet une infinité de solutions, alors $a = 0$.
Indication : raisonner par contraposée.

Exercice 10. On considère 3 réels x_1, x_2, x_3 tels que

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$$

Montrer qu'on a $x_2 - x_1 \leq \dfrac{1}{2}$ ou $x_3 - x_2 \leq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 11. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 12.

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier $7^n - 4^n$ est un multiple de 3.
2) On considère la propriété P_n : $8^n + 2$ est multiple de 7. Montrer qu'elle est héréditaire. Est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 13 ($\star$)**.** Montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $2^p m$ avec $p \in \mathbb{N}$ et m un entier naturel impair.

Exercice 14. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x-y) = x - f(y)$$

Indication : déterminer $f(0)$.

Exercice 15. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Indication : déterminer $f(0)$.

Exercice 16 ($\star$)**.** On considère un polygône régulier à n points dans le plan. On trace toutes les droites passant par deux de ces points. Combien de droites sont ainsi tracées ?

Exercice 17 ($\star\star$)**.** Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites passant par deux de ces points et on en compte 2022 distinctes. Justifiez que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.

Ensembles

Exercice 18. Soit A, B deux ensembles. Montrer que $\quad A = B \iff A \cup B = A \cap B$

Exercice 19. Soit A, B, C trois ensembles. Montrer que $\quad A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$

Exercice 20. Soit A, B deux ensembles. Montrer que

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Exercice 21. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
Indication : la somme ou la différence de deux rationnels est encore un rationnel.